



Sujet Des Examens

SMA 5

exosup.com

Clubnajah2013@gmail.com
www.clubnajah.blogspot.com
www.facebook.com/succes.club

2015-2016

CLUB NAJAH
UCD.FS.ELJADIDA
LE PRÉSIDENT

Examen d'Intégration
Durée : 1H30

Exercice 1. Soit $(\Omega, \mathcal{T})$ un espace mesurable. On suppose que $\Omega = \bigcup_{n \geq 1} \Omega_n$ avec $\Omega_n \in \mathcal{T}$ pour tout $n \geq 1$.

1. Vérifier que $\mathcal{T}_n = \mathcal{T} \cap \Omega_n$ est une tribu sur Ω_n .
2. Montrer que l'on peut choisir les Ω_n deux à deux disjoints.
3. Montrer que l'on peut choisir la suite $\{\Omega_n, n \geq 1\}$ croissante.
4. Soit $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ et f_n la restriction de f à Ω_n pour tout $n \geq 1$. On suppose de plus que $\{\Omega_n, n \geq 1\}$ sont deux à deux disjoints.
Montrer que f est $\mathcal{T}$ -mesurable si et seulement si les f_n sont $\mathcal{T}_n$ -mesurables pour tout $n \geq 1$.

Exercice 2.

Soit $\varepsilon > 0$. Montrer qu'il existe un ouvert U dense dans $\mathbb{R}$ tel que $\lambda(U) < \varepsilon$.
On rappelle que $\mathbb{Q}$ est dénombrable et dense dans $\mathbb{R}$.

Exercice 3. Calculer en justifiant toutes les étapes :

1.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \int_0^1 \frac{x^2}{(1+x^2)^n} dx.$$

2.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \frac{n^{\frac{3}{2}} x}{1+n^2 x^2} dx.$$

On peut utiliser la fonction $g(x) = x^{-\frac{1}{2}}$ si $x \in]0, 1]$ et $g(0) = 0$.

Exercice 4. Soit $(\Omega, \mathcal{T}, \mu)$ un espace mesuré et $f, g : \Omega \rightarrow [0, +\infty]$ mesurables.

1. Montrer que

$$\int_{\Omega} f g d\mu \leq \left(\int_{\Omega} f^2 d\mu \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\Omega} g^2 d\mu \right)^{\frac{1}{2}}.$$

2. On suppose que $fg = 1$, Montrer que

$$(\mu(\Omega))^2 \leq \left(\int_{\Omega} f d\mu \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\Omega} g d\mu \right)^{\frac{1}{2}}.$$

BONNE CHANCE

EXAMEN ORDINAIRE

Janvier 2015

(Durée 1H30)

Exercice 1. On considère le programme non linéaire suivant :

$$(P) \quad \begin{aligned} &\text{minimiser } x_1^2 + 2x_2^2 \\ &\begin{cases} x_1 + x_2 = 3 \\ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \end{cases} \end{aligned}$$

CLUB NAJAH
UCD.FS.ELJADIDA
LE PRÉSIDENT

- 1) (P) admet-il une solution optimale? Est-elle unique?
- 2) Transformer (P) en un problème équivalent sans contraintes. Dans quel sens les deux problèmes sont-ils équivalents?
- 3) Résoudre le problème sans contraintes. Admet-il une solution unique?
- 4) En déduire celle(s) de (P) . Retrouver le résultat par l'optimalité KKT. Justifier votre réponse.
- 5) Une autre approche pour résoudre un problème du type (P) , est de le transformer en un problème sans contraintes de la forme :

$$(P_\mu) \quad \begin{aligned} &\text{minimiser } (x_1^2 + 2x_2^2) + \mu(x_1 + x_2 - 3)^2 \\ &\begin{cases} (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \end{cases} \end{aligned}$$

où $\mu > 0$ est un scalaire choisi assez grand (c'est la méthode de pénalisation ou de pénalité). Effectuer quelques itérations de la méthode de descente à plus forte pente, appliquée à (P_μ) , pour $\mu = 10$, partant de $x^0 = (0, 0)$, pour approcher une solution optimale de (P) . On choisira des pas de déplacement optimaux.

Exercice 2. On considère le programme linéaire suivant :

$$(P) \quad \begin{aligned} &\text{minimiser } 3x_1 + 6x_2 \\ &\begin{cases} x_1 + 2x_2 \geq 8 \\ -2x_1 + 3x_2 \leq 6 \\ x_1 - x_2 \leq 2 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

- 1) Résoudre (P) par la méthode du simplexe (Phase I et II).
- 2) En déduire $\text{argmin}(P)$ et interpréter graphiquement le résultat.
- 3) Trouver le dual de (P) et celui du problème standard. Comparer les deux duals.



EXAMEN DE TOPOLOGIE (DURÉE 1H30MN)

Exercice 1. (7 pts)

Soient E un ensemble tel que $\text{card}E \geq 2$ et $a \in E$.

On pose $\tau = \{O \subset E \text{ tel que } a \notin O\} \cup \{O \subset E \text{ tel que } a \in O \text{ et } O^c \text{ fini}\}$.

(1) Montrer que τ est une topologie sur E .

(2)-a- Montrer que si $y \in E, y \neq a$ alors $\{y\} \in \tau$ et $\{y\}^c \in \tau$.

-b- En déduire que (E, τ) est séparé.

(3) Montrer que τ est la topologie discrète si et seulement si E est fini.

(4) Montrer que E est compact.

Exercice 2. (6 pts)

Soient E et F deux espaces topologiques et $f : E \rightarrow F$ telle que

$$\forall x \in E, \exists V \in \mathcal{V}(x) \mid f \text{ est constante sur } V.$$

(1) Montrer que f est continue.

(2) Montrer que $\forall y \in F, f^{-1}(\{y\})$ est ouvert dans E .

(3) Montrer que si E est connexe alors f est constante.

(Ind. si $a \in E$ et $b = f(a)$ considérer $A = f^{-1}(\{b\})$.)

Exercice 3. (7 pts)

Soient (E, τ) et (F, τ') deux espaces topologiques et $f : E \rightarrow F$.

On dit que f est ouverte (resp. fermée) si l'image de tout ouvert (resp. fermé) de E est un ouvert (resp. fermé) de F .

(1)-a- Montrer que si $G \subset E$ et si $i : G \rightarrow E$ est l'injection canonique, alors i est ouverte si et seulement si G est un ouvert de E .

-b- Montrer que f est ouverte si et seulement si $\forall A \subset E, f(\overset{\circ}{A}) \subset \overset{\circ}{f(A)}$.

-c- Montrer que f est fermée si et seulement si $\forall A \subset E, \overline{f(A)} \subset f(\overline{A})$.

(2) Si f est surjective, continue et ouverte, montrer que τ' est la topologie la plus fine sur F qui rend continue f .

(3) Montrer que si f est continue, E est compact et F est séparé alors f est fermée.

Exercice 4. (Question Bonus)(2 pts)

Soient E un espace topologique, $A \subset E$ ouvert et fermé et $a \in A$. On note $C(a)$ la composante connexe de a dans E .

Montrer que $C(a) \subset A$.

CLUB NAJAH
UCD.FS.ELJADIDA
LE PRÉSIDENT

Bonne chance

Examen de rattrapage d'Intégration
Durée : 1H30

Exercice 1.

Soit Ω un ensemble non vide .

1. Soit $\{A, B, C, D\}$ une partition de Ω . Donner explicitement la tribu $\sigma(\{A, B, C, D\})$.
2. Soit Ω_1, Ω_2 deux parties non vides de Ω telles que $\Omega_1 \cap \Omega_2 \neq \emptyset$ et $\Omega_1 \cup \Omega_2 \neq \Omega$.
Donner explicitement la tribu $\sigma(\{\Omega_1, \Omega_2\})$.

Exercice 2. Soit λ la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$.

1. Soit $\mathcal{O}$ un ouvert non vide de $\mathbb{R}$. Montrer que $\lambda(\mathcal{O}) > 0$.
2. Soient $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions continues.
 - (a) On pose $A = \{x \in \mathbb{R} : f(x) \neq g(x)\}$. Montrer que A est un ouvert.
 - (b) Montrer que $f = g \text{ } \lambda - pp. \implies f = g$.

Exercice 3. Soit $\phi : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Calculer

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n \int_0^1 \phi(x) e^{-n \times \max(x, 1-x)} dx.$$

Exercice 4. Soit l'intervalle $I =]0, 1[$ et f une fonction définie sur $I \times I$, par

$$f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}, \quad \forall x, y \in I.$$

1. Calculer $\int_I [\int_I f(x, y) d\lambda(x)] d\lambda(y)$.
2. Calculer $\int_I [\int_I f(x, y) d\lambda(y)] d\lambda(x)$.
3. En déduire la valeur de $\int_{I \times I} |f(x, y)| d\lambda(x) \otimes \lambda(y)$.

CLUB NAJAH
UCD.FS.ELJADIDA
LE PRÉSIDENT

BONNE CHANCE



RATTRAPAGE DE TOPOLOGIE (DURÉE 1H30MN)

Exercice 1. (4 pts)

(A) Soit E un espace topologique. Répondre par vrai ou faux en justifiant

(1) Si une suite dans E est convergente, sa limite est unique
(2) $A \subset E$ est dense dans E si et seulement si tout élément de E est limite d'une suite d'éléments de A

(3) Si une suite admet une seule valeur d'adhérence ℓ , alors elle converge vers ℓ

(4) Si E est un espace métrique, alors $\overline{B(a, r)} = B'(a, r)$

(B) Montrer que dans un espace métrique, toute boule $B(a, r)$ est ouverte.

Exercice 2. (3 pts)

Soient E un espace topologique connexe non vide, F un espace topologique discret et $f : E \rightarrow F$ continue. Montrer que f est constante.

(Ind. considérer, pour $x_0 \in E$, l'ensemble $G = \{x \in E, f(x) = f(x_0)\}$.)

Exercice 3. (7 pts)

Soit (E, τ) un espace topologique.

(1) Soit A une partie dense dans E . Montrer que

$$O \in \tau \Rightarrow O \subset \overline{O \cap A}.$$

(2) Montrer que

$$O \in \tau \Leftrightarrow \forall A \subset E, \quad \overline{O \cap A} = \overline{O} \cap \overline{A}.$$

(3) Montrer que si $A, B \in \tau$ et si A et B sont denses dans E alors $A \cap B$ est dense dans E .

(4) Donner un exemple de parties A et B denses dans un espace topologique E telles que $A \cap B$ ne soit pas dense dans E .

Exercice 4. (3 pts)

Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x + \frac{1}{2}$.

(1) Énoncer le théorème du point fixe.

(2) Expliquer pourquoi f n'admet pas un point fixe.

Exercice 5. (3 pts)

Soit (E, d) un espace métrique tel que toute boule fermée soit compacte. Montrer que E est complet.

Bonne chance

CLUB NAJAH
UCD.FS.ELJADIDA
LE PRÉSIDENT

Epreuve de Rattrapage - Février 2015

Durée 1H30

Exercice 1. Soit $f(x) = \sqrt{x}$ sur $[0, +\infty[$.

- 1) Pour $k \in \mathbb{N}$, soit $x_{k+1} = x_k + \alpha_k d_k$ avec $x_k \in [0, +\infty[$, $d_k \in]-\infty, 0[$ et $\alpha_k \in [0, \widehat{\alpha}_k]$. Quelle condition sur $\widehat{\alpha}_k$ pour que $x_{k+1} \geq 0$?
- 2) Partant de $x_0 = 1$, effectuer les trois premières itérations de la méthode de descente appliquée à f . On choisira des pas de déplacement type Armijo, avec constante $\beta = 0.25$, tout en utilisant le résultat de la question 1.

Exercice 2. Une boîte sans couvercle a la forme d'un parallélépipède de largeur x , de longueur y et de hauteur z . Sachant que la somme des aires de ses cinq faces doit valoir $3k^2$, où $k > 0$ est une constante fixée, on cherche des valeurs à donner à x , y et z pour que son volume soit maximal.

- 1) Ecrire le modèle d'optimisation correspondant.
- 2) Montrer que le problème peut être réduit à un problème à deux dimensions ayant seulement des contraintes de positivité.
- 3) Expliquer brièvement pourquoi le problème à deux dimensions se comporte comme problème sans contraintes.
- 4) Utiliser les conditions KKT pour justifier la question 3.
- 5) Appliquer les conditions d'optimalité du premier et second ordre pour résoudre le problème à deux dimensions. En déduire le volume maximal de la boîte sans couvercle.

Exercice 3. On considère le programme linéaire suivant :

$$(P) \quad \begin{array}{ll} \text{minimiser} & -x_1 \\ \left\{ \begin{array}{l} 0 \leq x_1 \leq 8 \\ 0 \leq x_2 \leq 1 \end{array} \right. \end{array}$$

CLUB NAJAH
UCD.FS.ELJADIDA
LE PRÉSIDENT

- 1) Trouver $\text{argmin}(P)$ par la méthode du simplexe.
- 2) Interpréter graphiquement le résultat.
- 3) Résoudre le dual du problème standard par les écarts complémentaires. En déduire les solutions du dual de (P) .

Rattrappage d'Analyse Numérique II

Durée 1 heure 30 mn

Les documents ne sont pas autorisés

Exercice 1 On se propose de calculer une approximation de $x^* = \begin{pmatrix} x_1^* \\ x_2^* \end{pmatrix}$ la solution du système nonlinéaire à deux inconnues x_1, x_2 suivant :

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + (2 + \sin(x_1)) \exp(x_1) = 1 \\ 2x_2 - x_1 + (2 + \sin(x_2)) \exp(x_2) = 1 \end{cases} \quad (1)$$

On pose

$$f(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_1 - x_2 + (2 + \sin(x_1)) \exp(x_1) - 1 \\ 2x_2 - x_1 + (2 + \sin(x_2)) \exp(x_2) - 1 \end{pmatrix}$$

avec $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$. Ainsi le problème (1) s'écrit sous la forme : trouver $x^* = \begin{pmatrix} x_1^* \\ x_2^* \end{pmatrix}$ tel que $f(x^*) = 0$.

1. Calculer $Df(x)$ pour $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$

2. Ecrire explicitement les itérées de Newton $x^{(n)} = \begin{pmatrix} x_1^{(n)} \\ x_2^{(n)} \end{pmatrix}$ qui permettent de calculer une approximation de $x^* = \begin{pmatrix} x_1^* \\ x_2^* \end{pmatrix}$ en partant de $x^0 = \begin{pmatrix} x_1^{(0)} \\ x_2^{(0)} \end{pmatrix}$.

3. La méthode de Newton-corde s'écrit sous la forme

$$\begin{cases} z^{(0)} \text{ donnée dans } \mathbb{R}^2 \\ Df(z^{(0)})(z^{(n)} - z^{(n+1)}) = f(z^{(n)}) \end{cases} \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

On notera $z^{(n)} = \begin{pmatrix} z_1^{(n)} \\ z_2^{(n)} \end{pmatrix}$ les différents itérées obtenus par la méthode de Newton-corde. En partant de $x^0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ on obtient le tableau suivant

n	$x_1^{(n)}$	$x_2^{(n)}$	$\frac{\ x^{(n-1)} - x^{(n)}\ _\infty}{\ x^{(n)}\ _\infty}$	$z_1^{(n)}$	$z_2^{(n)}$	$\frac{\ z^{(n-1)} - z^{(n)}\ _\infty}{\ z^{(n)}\ _\infty}$
0	$0.000000e^{-00}$	$0.000000e^{-00}$		$0.000000e^{-00}$	$0.000000e^{-00}$	
1	$-2.500000e^{-01}$	$-2.500000e^{-01}$	$1.000000e^{+00}$	$-2.500000e^{-01}$	$-2.500000e^{-01}$	$1.000000e^{+00}$
2	$-2.868401e^{-01}$	$-2.868401e^{-01}$	$1.284343e^{-01}$	$-2.787308e^{-01}$	$-2.787308e^{-01}$	$1.030772e^{-01}$
3	$-2.875223e^{-01}$	$-2.875223e^{-01}$	$2.372544e^{-03}$	$-2.853681e^{-01}$	$-2.853681e^{-01}$	$2.325879e^{-02}$
4	$-2.875225e^{-01}$	$-2.875225e^{-01}$	$7.913488e^{-07}$	$-2.869893e^{-01}$	$-2.869893e^{-01}$	$5.648921e^{-03}$
5	$-2.875225e^{-01}$	$-2.875225e^{-01}$	$8.816252e^{-14}$	$-2.873902e^{-01}$	$-2.873902e^{-01}$	$1.395027e^{-03}$

Interpréter les résultats au dessus et comparer les deux méthodes.

4. Vérifier numériquement l'ordre de convergence de la méthode de Newton.

Exercice 2 On considère le problème suivant : trouver une fonction $u : x \in [0, 1] \longrightarrow u(x) \in \mathbb{R}$ telle que

$$\begin{cases} -u''(x) &= f(x) \text{ pour } x \in]0, 1[\\ u(0) &= 0 \\ u'(1) + u(1) &= 5 \end{cases} \quad (2)$$

Soit N un entier strictement positif, on divise l'intervalle $[0, 1]$ en $(N + 1)$ sous intervalle de longueur $h = \frac{1}{N + 1}$. On note par $x_j = jh$ pour $j = 0, \dots, N + 1$ et u_j une approximation de $u(x_j)$ pour $j = 1, \dots, N$.

1. Proposer un schéma de différence finies d'ordre 2 pour discrétiser le problème (2).
2. Montrer que le système linéaire qui résulte de la discrétisation effectuée s'écrit sous la forme

$$A_h U_h = F_h$$

avec, A_h est une matrice carrée d'ordre $N + 1$, U_h et F_h sont des vecteurs (on donnera explicitement A_h , U_h , et F_h)

Rappels

$$f'(x) = \frac{-f(x + 2h) + 4f(x + h) - 3f(x)}{2h} + O(h^2).$$

$$f'(x) = \frac{f(x + h) - f(x - h)}{2h} + O(h^2).$$

$$f'(x) = \frac{3f(x) - 4f(x - h) + f(x - 2h)}{2h} + O(h^2).$$

$$f''(x) = \frac{f(x - 2h) - 2f(x - h) + f(x)}{h^2} + O(h).$$

$$f''(x) = \frac{f(x + h) - 2f(x) + f(x - h)}{h^2} + O(h^2).$$

$$f''(x) = \frac{f(x + 2h) - 2f(x + h) + f(x)}{h^2} + O(h).$$

*CLUB NAJAH+
UCD.FS.ELJADIDA
LE PRÉSIDENT

UCD, FSJ, Dpt. Maths, El Jadida

Élément de module : Equations différentielles, Durée : 1h30'

SMA5, 2012/2013

(Responsable : Prof. Lesfari, <http://lesfari.com>).

Exercice 1. (Question de cours). Décrire brièvement ce qu'on entend par flot d'une équation différentielle.

Exercice 2. Résoudre matriciellement le problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} y_1' = 2y_1 + y_2 \\ y_2' = y_1 + 2y_2 \end{cases}$$

$$y_1(0) = 1, \quad y_2(0) = 3.$$

Exercice 3. On considère l'équation aux dérivées partielles du second ordre de fonction inconnue $z(x, y)$:

$$x^4 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}.$$

- Déterminer ses caractéristiques.
- Déterminer l'intégrale générale de cette équation (en imposant des conditions à z).
- Déterminer des solutions élémentaires de cette équation par la méthode de séparation des variables.

UCD, FSJ, Dpt. Maths, El Jadida

Elément de Module : Equations différentielles, Rattrapage,

Durée : 1h30', SMA5, 2012/13

(Responsable : Prof. Lesfari, <http://lesfari.com>).

Exercice 1. Déterminer la solution de l'équation aux dérivées partielles :

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{1}{k^2} \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = \sin(\alpha x - \omega t),$$

qui satisfait aux conditions initiales

$$z(x, 0) = 0, \quad \frac{\partial z}{\partial t}(x, 0) = 0.$$

Exercice 2. Soit

$$f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n, \quad (t, y) \longmapsto f(t, y),$$

où Ω est un ouvert de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$. On suppose que f est continue en (t, y) et localement lipschitzienne par rapport à y .

a) Montrer que pour tout point $(t_0, y_0) \in \Omega$, il existe un intervalle fermé I centré en t_0 et une solution locale $y : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$ de l'équation différentielle $y' = f(t, y)$ avec condition initiale $y(t_0) = y_0$.

b) Montrer qu'en outre $y \in C^1$ et cette solution est unique.

c) Que peut-on dire sur l'existence et l'unicité de la solution si f est seulement supposée continue (et non lipschitzienne)? Distinguer le cas où l'espace est de dimension finie ainsi que le cas où l'espace est de dimension infinie.

d) Montrer que le problème de Cauchy

$$\begin{aligned} x'' &= \sin x \\ x(0) &= \frac{\pi}{4} \\ x'(0) &= 0 \end{aligned}$$

admet une solution unique.

Examen Rattrapage d'Equations Différentielles
Durée 1h30, Niveau: SMA5

CLUB NAJAH
UCD.FS.ELJADIDA
LE PRÉSIDENT

Exercice 1: 1) Résoudre le système différentiel suivant,

$$(1.1) \quad \begin{cases} x'' + x' - y' - y = 0 \\ y'' + x' - y = 0 \end{cases}$$

2) Soient f et $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions continues et telles que, il existe $a > 0$ tel que, $G(x) \geq ax^2$ et $xf(x) \geq 0$, pour tout $x \in \mathbb{R}$, où $G : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est la fonction définie par

$$G(x) = \int_0^x g(s) ds, \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}.$$

On considère le problème de Cauchy,

$$(1.2) \quad \begin{cases} x'' + f(x') + g(x) = 0 \\ x(0) = \zeta_1, \quad x'(0) = \zeta_2 \end{cases}$$

où ζ_1 et $\zeta_2 \in \mathbb{R}$.

i) Montrer que toute solution maximale de (1.2) est bornée, pour $t \geq 0$.

ii) En déduire que les solutions maximales de (1.2) sont définies sur $\mathbb{R}_+$.

3) Plus généralement, on considère maintenant le système suivant,

$$(1.3) \quad \begin{cases} X'' + \varphi(X') + \psi(X) = 0 \\ X(0) = \zeta_1, \quad X'(0) = \zeta_2 \end{cases}$$

Où φ et $\psi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ sont continues sur $\mathbb{R}^2$ (muni de sa norme associée à son produit scalaire) et telles que,

(*) il existe $a > 0$ tel que, $\Psi(X) \geq a \|X\|^2$ et $\langle X, \varphi(X) \rangle \geq 0$, pour tout $X \in \mathbb{R}^2$.

où $\Psi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ est la fonction définie par les équations,

$$\frac{\partial \Psi(x, y)}{\partial x} = \psi_1(x, y) \text{ et } \frac{\partial \Psi(x, y)}{\partial y} = \psi_2(x, y) \text{ pour tout } (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Montrer que toute solution de (1.3) est bornée pour $t \geq 0$ et en déduire que les solutions maximales de (1.3) sont définies sur $\mathbb{R}^+$.

4) Déterminer les fonctions φ et ψ qui correspondent au système (1.1). Ces fonctions vérifient-elles les hypothèses (*) ? Conclure.

Exercice 2: On considère le système différentiel,

$$(2.1) \quad \begin{cases} x' = -\frac{t}{1+t^2}x + \frac{1}{1+t^2}y \\ y' = \frac{1}{1+t^2}x + \frac{t}{1+t^2}y \end{cases}$$

1) - De quel type est le système (2.1) ?

- Que peut-on dire concernant l'existence, l'unicité et l'intervalle de définition des solutions de (2.1) ?

- Déterminer les solutions $t \rightarrow (x(t), y(t))$ du problème de Cauchy,

$$(2.1c) \quad \begin{cases} (2.1) \\ (x(t_0), y(t_0)) = (x_0, y_0) \end{cases}$$

qui sont de la forme

$$(x(t), y(t)) = (\alpha t + \beta, \gamma t + \delta);$$

où α, β, γ et δ sont des constantes réelles

- Résoudre (2.1c) lorsque $t_0 = 1$ et $(x_0, y_0) = (1, 1)$

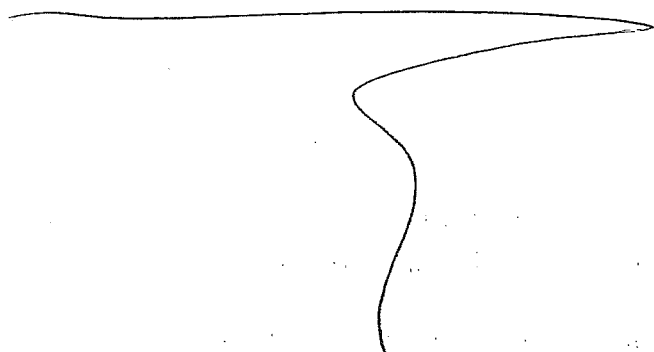
2) On cherche à déterminer les solutions de (2.1) qui sont de la forme

$$(x(t), y(t)) = (u(t), tu(t) + v(t))$$

où u et v sont des fonctions de la variable réelle t .

- Montrer que cela conduit à une équation différentielle en (u, v) notée (2.1₁) que l'on explicitera.

- Résoudre (2.1₁) et en déduire l'expression générale des solutions de (2.1).



Exercice 1: Soit $f : IR_+ \times IR_+ \rightarrow IR$ une fonction continue, pour laquelle il existe un réel m tel que,

$$f(\lambda t, \lambda^m x) = \lambda^{m-1} f(t, x),$$

pour tout $(t, x) \in IR_+ \times IR_+$ et tout $\lambda \in IR_+$.

a) Montrer que par un changement de variables convenable, l'équation différentielle,

$$x' = f(t, x),$$

appelée équation quasi-homogène se réduit en une équation à variables séparables.

b) Montrer que l'équation différentielle,

$$x' = x^2 - \frac{2}{t^2}$$

est quasi-homogène. Résoudre alors cette équation.

Exercice 2: Soient $a > 0$ et $f : IR \times IR^n \rightarrow IR^n$ une application de classe C^1 vérifiant, pour tout $(t, x) \in IR \times IR^n$, on a

$$\langle f(t, x), x \rangle \leq a \langle x, x \rangle$$

où $\langle ., . \rangle$ désigne le produit scalaire usuel sur IR^n . On désigne par φ une solution de l'équation différentielle;

$$\varphi'(t) = f(t, \varphi(t)) \quad (*)$$

définie sur un intervalle ouvert I de IR .

a) On pose $u(t) = \langle \varphi(t), \varphi(t) \rangle$. Montrer que l'application u est dérivable sur I , calculer sa dérivée et montrer qu'elle vérifie

$$|u'(t)| \leq 2au(t)$$

b) Soient t_0 et t deux points de I . Comparer $u(t)$ et $u(t_0)$.

c) Montrer que les solutions maximales de l'équation $(*)$ sont définies sur IR tout entier.

d) Montrer que les solutions maximales du système différentiel

$$\begin{cases} x' = 2x + ty + y^2 \\ y' = -tx + y - xy \end{cases}$$

sont définies sur $\mathbb{R}$.

Exercice 3: a) Soient I un intervalle réel non trivial, Ω un ouvert non vide de $\mathbb{R}^n$ et $g : I \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ une application.

i) On suppose que g est continue sur $I \times \mathbb{R}^n$. Montrer que pour toute donnée initiale $(a; \xi) \in I \times \Omega$, le problème de Cauchy suivant, associé à l'équation différentielle du $n^{\text{ième}}$ ordre,

$$\begin{cases} y^{(n)} = g(t, y, y', \dots, y^{(n-1)}) \\ y(a) = \xi_1, y'(a) = \xi_2, \dots, y^{(n-1)}(a) = \xi_n \end{cases} \quad (1)$$

possède au moins une solution

ii) On suppose maintenant que g est localement Lipshityenne sur Ω . Montrer que le problème (1) possède la propriété d'unicité.

b) On considère l'équation différentielle du 3^{ème} ordre suivante

$$x''' - x'' + x' - x = te^t \quad (2)$$

i) Ecrire l'équation (2) sous forme vectorielle

$$X' = AX + b \quad (3)$$

ii) Déterminer un système fondamental de solutions de l'équation homogène associé à (3).

iii) Résoudre l'équation (3) et en déduire la solution générale de (2)



EXAMEN DE TOPOLOGIE

(DURÉE 3H)

Exercice 1. (4,5 pts)

Soit $(G, *)$ un groupe. On note e son élément neutre et x' le symétrique de $x \in G$. Soit τ une topologie sur G telle que les applications

$$\begin{array}{ccc} G \times G & \rightarrow & G \\ (x, y) & \mapsto & x * y \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{ccc} G & \rightarrow & G \\ x & \mapsto & x' \end{array}$$

soient continues. On dit alors que G est un groupe topologique.

- (1) Montrer que $(\mathbb{R}, +)$ muni de la topologie usuelle est un groupe topologique.
- (2) Soient $A, B \subset G$ et $b \in G$. On suppose que A est ouvert. Montrer que les ensembles suivants sont ouverts dans G

$$A' = \{x', x \in A\},$$

$$A * b = \{x * b, x \in A\},$$

$$A * B = \{x * y, x \in A, y \in B\}.$$

- (3) Montrer que

$$\forall V \in \mathcal{V}(e), \quad \exists W \in \mathcal{V}(e) / W * W \subset V.$$

- (4) Montrer que si G est séparé alors $\{e\}$ est fermé.
- (5) Si H est un sous groupe de G montrer que $\overline{H}$ est un sous groupe de G .
- (6) On suppose que G est séparé. Soit $A \subset G$. On pose

$$B = \{x \in G / \forall a \in A, a * x = x * a\}.$$

Montrer que B est un sous groupe fermé de G .

Exercice 2. (4,5 pts)

- (1) Montrer que si E et F sont des espaces topologiques tels que E soit compact et F séparé, et si $f : E \rightarrow F$ est une bijection continue alors f est un homéomorphisme.

- (2) Soit $E = \{(x_n)_n \subset \mathbb{R} \text{ nulle à partir d'un certain rang}\}$. Pour $(x_n)_n \in E$, on pose

$$\|(x_n)_n\| = \sup_n |x_n| \quad \text{et} \quad L((x_n)_n) = \left(\frac{x_n}{n+1} \right)_n.$$

- a- Montrer que $\|\cdot\|$ définit une norme qui fait de E un Banach.
- b- Montrer que L est linéaire, bijective et continue de E sur E et que L^{-1} n'est pas continue.

(Ind. considérer pour $k \in \mathbb{N}$ la suite $(\delta_{n,k})_n$ définie par $\delta_{n,k} = 0$ si $k \neq n$ et $\delta_{n,n} = 1$)

- c- Conclure.

Exercice 3. (3 pts)

Soient (E, d) un espace métrique, A une partie dense de E différente de E , (F, d') un espace métrique complet et $f : A \rightarrow F$ une application uniformément continue.

(1) Montrer que si $x \in A^c$, alors il existe une suite $(x_n) \subset A$ convergeant vers x telle que la suite $(f(x_n))$ soit convergente dans F . On note y_x sa limite.

(2) On pose $g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in A \\ y_x & \text{si } x \in A^c \end{cases}$

Montrer que g est bien définie et qu'elle est continue.

Exercice 4. (4 pts)

Soit H un espace préhilbertien. On note $(./.)$ son produit scalaire et $\|.\|$ la norme associée. On dit qu'une suite $(x_n) \subset H$ converge faiblement vers $x \in H$ et on note $x_n \rightharpoonup x$ si

$$\forall y \in H, \quad \lim (x_n/y) = (x/y).$$

(1) Montrer que si $x_n \rightarrow x$ alors $x_n \rightharpoonup x$.

(2) Montrer que si $x_n \rightharpoonup x$ et $\|x_n\| \rightarrow \|x\|$ alors $x_n \rightarrow x$.

(Ind. calculer $\|x_n - x\|$)

(3) Soit $(e_n)_n$ une famille orthonormée de H . Montrer que $e_n \rightharpoonup 0_H$ mais $e_n \not\rightarrow 0_H$.

(Ind. on peut utiliser l'inégalité de Bessel)

Exercice 5. (4 pts)

(A) Soient (E, d) , (F, d') deux espaces métriques et (f_n) une suite de fonctions équi-continues de E sur F qui converge simplement vers une fonction f . Montrer que f est continue sur E .

Si de plus E est compact, montrer que (f_n) converge uniformément vers f .

(B) (1) Énoncer le théorème de Stone-Weierstrass réel

(2) Soit (E, d) un espace métrique compact. On pose

$$\mathcal{H} = \{f : E \rightarrow \mathbb{R} / \exists C > 0, \forall x, y \in E, |f(x) - f(y)| \leq Cd(x, y)\}.$$

Montrer que $\mathcal{H}$ est partout dense dans $\mathcal{C}(E, \mathbb{R})$.

BONNE CHANCE



RATTRAPAGE DE TOPOLOGIE

(DURÉE 3H)

Exercice 1. (3,5 pts)

On pose $\tau = \{]a, +\infty[, a \in \mathbb{R}\} \cup \{\emptyset, \mathbb{R}\}$

- (1) Vérifier que τ définit une topologie sur $\mathbb{R}$.
- (2) Montrer que τ est strictement moins fine que τ_u la topologie usuelle sur $\mathbb{R}$.
- (3) τ est-elle séparée ?
- (4) Calculer l'adhérence et l'intérieur des ensembles suivants pour la topologie τ : $[0, 1[, \{0, 1\}, \mathbb{Q}$.

Exercice 2. (5 pts)

Soit E un espace topologique séparé et soit $(x_n)_n \subset E$. On pose, pour $p \in \mathbb{N}$

$$A_p = \{x_n, n \geq p\}.$$

- (1)-a- Rappeler la définition d'un compact par les ouverts puis par les fermés.
- b- Montrer que l'ensemble des valeurs d'adhérence de $(x_n)_n$ est égal à $\bigcap_{p \in \mathbb{N}} \overline{A_p}$.
- c- Montrer que si E est compact et si $(x_n)_n$ admet une seule valeur d'adhérence ℓ alors $(x_n)_n$ converge vers ℓ .
- (2) On suppose que $(x_n)_n$ converge vers a . Montrer que l'ensemble

$$B = \{x_n, n \in \mathbb{N}\} \cup \{a\}$$

est compact.

- (3) On suppose que (E, d) et (E', d') sont deux espaces métriques, et que $f : E \rightarrow E'$ est telle que la restriction de f à tout compact de E est continue. Montrer que f est continue

Exercice 3. (3 pts)

Soient (E, d) un espace métrique complet et $f : E \rightarrow E$ telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall x, y \in E, \quad d(f^n(x), f^n(y)) \leq \alpha_n d(x, y)$$

où $f^n = f \circ f \circ \dots \circ f$ n fois, et $(\alpha_n)_n$ est une suite telle que $\forall n \in \mathbb{N}, \alpha_n > 0$ et la série $\sum \alpha_n$ converge.

On pose pour $x_0 \in E$, $x_n = f^n(x_0)$

Montrer que la suite $(x_n)_n$ est convergente et en déduire que f admet un point fixe unique.

(Tournez la page S.V.P.)

Exercice 4. (5 pts)

Soit $E = \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ muni de la norme de la convergence uniforme $\|\cdot\|_\infty$. On pose

$$A = \{f \in E / f(0) = 0, f(1) = 1, \|f\|_\infty \leq 1\}$$

et pour $f \in E$, $\varphi(f) = \int_0^1 (f(t))^2 dt$

(1) Montrer que A est fermé borné dans E .

(2) Montrer que :

-a- φ est continue sur E .

-b- $\inf_{f \in A} \varphi(f) = 0$. (Ind. considérer $f_n(t) = t^n$)

-c- il n'existe pas $f \in A$ telle que $\varphi(f) = 0$.

(3) Que peut-on conclure pour A ? (Justifier en énonçant le théorème utilisé)

Peut-on dire que tout fermé borné de E est compact? Pourquoi?

Exercice 5. (3,5 pts)

Soit $E = \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ muni du produit scalaire

$$(f/g) = \int_0^1 f(t)g(t) dt.$$

Soient $f_0, f_1 \in E$ définies pour $x \in [0, 1]$ par $f_0(x) = 1 - x$, $f_1(x) = x$. Soit F le sous espace vectoriel de E engendré par f_0 .

(1) Montrer que F est complet.

(2) Calculer la projection de f_1 sur F et la distance de f_1 à F .

Faire au choix UN des deux exercices suivants**EXERCICE 1** (Bonus). (2 pts)

Montrer que si E est un espace vectoriel normé de dimension infinie, et si $K \subset E$ est un compact alors $\overset{\circ}{K} = \emptyset$. (Ind. utiliser l'absurde)

EXERCICE 2 (Bonus). (2 pts)

Soit $E = \{f \in \mathcal{C}^1([0, 1], \mathbb{R}) / \|f'\|_\infty \leq \|f\|_\infty\}$.

Montrer que $\dim E < \infty$. (Ind. appliquer le théorème d'Ascoli à la boule unité fermée de E .)



EXAMEN DE TOPOLOGIE (DURÉE 3H)

Exercice 1. (2 pts)

Soient (E, d) e.m., $O \subset E$ ouvert et $n \in \mathbb{N}^*$. On pose

$$X_n = \{x \in E, \quad d(x, O^c) \geq \frac{1}{n}\}.$$

+ CLUB NAJAH+
UCD.FS.ELJADID
LE PRÉSIDENT

(1) Montrer que X_n est fermé et que $O = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} X_n$.

(2) Montrer de même que tout fermé est une intersection dénombrable d'ouverts.

Exercice 2. (3 pts)

(1) Soit E un espace topologique. Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes

-a- Il n'existe pas deux ouverts non vides disjoints de E dont la réunion est E

-b- Toute application continue de E à valeurs dans l'espace discret $\{0, 1\}$ est constante.

(2) On suppose que $A \subset B \subset \bar{A} \subset E$ avec A connexe. Utiliser -b- pour montrer que B est connexe.

Exercice 3. (3,5 pts)

Soient E et F deux espaces topologiques. On suppose que F est séparé.

(1) Soient $A \subset E$ et $f: E \rightarrow F$ continue telle que

$$\exists C \in F, \quad \forall x \in A, \quad f(x) = C.$$

Montrer que $\forall x \in \bar{A}, \quad f(x) = C$. (Utiliser l'absurde).

(2) En déduire que s'il existe $a \in E$ tel que $\{a\}$ soit partout dense dans E , alors toute application continue de E sur F est constante.

(3) Montrer que l'hypothèse " F séparé" est indispensable.

Exercice 4. (4 pts)

On considère $E = \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$ muni de la norme de la convergence uniforme $\|\cdot\|_\infty$.

Soit $T: E \rightarrow E$ défini pour $f \in E$ et $x \in [a, b]$ par

$$T(f)(x) = \int_a^b k(x, t) f(t) dt$$

où $k \in \mathcal{C}([a, b] \times [a, b], \mathbb{R})$. Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset E$ une suite bornée.

(1) Vérifier que k est uniformément continue et en déduire que l'ensemble

$$A = \{T(f_n), n \in \mathbb{N}\}$$

est uniformément équicontinu.

(2) Montrer que la suite $(T(f_n))_{n \in \mathbb{N}}$ admet une sous suite convergente.

(Tournez la page S.V.P.)

Problème (7,5 pts)

Soit H un espace de Hilbert réel dont le produit scalaire est noté $(./.)$ et la norme associée $\|.\|$ et soit f une forme bilinéaire symétrique sur H vérifiant

(i) $\exists M > 0, \quad \forall x, y \in H, \quad |f(x, y)| \leq M \|x\| \|y\|$

(ii) $\exists \alpha > 0, \quad \forall x \in H, \quad f(x, x) \geq \alpha \|x\|^2.$

(1) En posant pour $x, y \in H, \quad (x/y)_0 = f(x, y)$, montrer qu'on a défini ainsi sur H un autre produit scalaire qui fait de H un Hilbert.

(2) Montrer qu'il existe $u \in \mathcal{L}_c(H, H)$ telle que

$$\forall x, y \in H, \quad f(x, y) = (x/u(y)) \text{ et } \|u\| \leq M$$

(Ind. pour $y \in H$ fixé, considérer l'application $x \mapsto f(x, y)$)

(3) Montrer que u est injective.

(4) Soit $y \in H$ fixé. Pour $\lambda > 0$, on considère l'application T définie de H sur H par

$$T(x) = x - \lambda (u(x) - y), \quad x \in H.$$

On suppose qu'il existe $M, 0 < M < 1$ telle que

$$\forall x, x' \in H, \quad \|T(x) - T(x')\| \leq M \|x - x'\|.$$

-a- Énoncer le théorème de l'application ouverte.

-b- Soit $x \in H$. On pose $x_n = T^n(x) = T \circ T \circ \dots \circ T(x)$ n fois. Montrer que $(x_n)_n$ est une suite de Cauchy dans H et en déduire qu'elle converge vers un point ℓ tel que $T(\ell) = \ell$.

(Ind. estimer d'abord $\|x_{n+1} - x_n\|$.)

-c- En déduire que u est surjective de H sur H puis que u^{-1} est continue.



RATTRAPAGE DE TOPOLOGIE

(DURÉE 3H)

Questions de cours (3 pts)

Soient E_1 et E_2 deux espaces topologiques. On pose $E = E_1 \times E_2$.

- (1) Rappeler la définition de la topologie produit τ sur E .
- (2) Quels sont les ensembles ouverts de τ ?
- (3) Si $F_1 \subset E_1$ et $F_2 \subset E_2$ sont fermés, est-ce que $F_1 \times F_2$ est un fermé de E ?

Exercice 1. (2 pts)

Soit $E = \mathbb{R}[X]$ muni de la norme définie pour $P = \sum_{0 \leq k \leq n} a_k X^k$ par

$$\|P\| = \sum_{0 \leq k \leq n} |a_k|.$$

Soit $\varphi: \begin{matrix} E & \rightarrow & \mathbb{R} \\ P & \mapsto & P(2) \end{matrix}$. En considérant la suite des polynômes $P_n = \sum_{0 \leq k \leq n} X^k$, montrer que φ est une application linéaire non continue.

Exercice 2. (3 pts)

Soit $E = \mathbb{R}_2[X]$ (ensemble des polynômes de degré ≤ 2)

On définit, pour $P, Q \in E$,

$$(P/Q) = P(0)Q(0) + P(1)Q(1) + P(2)Q(2).$$

- (1) Montrer qu'on a ainsi défini un produit scalaire sur E .
- (2) Si $A = \{aX + b, \quad a, b \in \mathbb{R}\}$, calculer $d(X^2, A)$.

Exercice 3. (1 pt)

Soit E un espace vectoriel normé et soient $A, B \subset E$ des compacts. On pose

$$C = \bigcup_{\substack{a \in A \\ b \in B}} [a, b]$$

où $[a, b] = \{ta + (1-t)b, \quad t \in [0, 1]\}$.

Montrer que C est compact.

Ind. considérer l'application

$$\begin{aligned} \varphi: [0, 1] \times A \times B &\rightarrow E \\ (t, a, b) &\mapsto ta + (1-t)b \end{aligned}$$

Tournez la page SVP

Exercice 4. (2 pts)

Soit E un espace vectoriel normé, et soit $T \in \mathcal{L}_r(E, E)$ tel que $\dim(\text{Im}T) < \infty$.

Soit $B \subset E$ un ensemble borné. Montrer que $T(B)$ est borné et en déduire que $T(B)$ est relativement compact.

Problème (9 pts)

Un espace topologique E est dit localement connexe si

$$\forall x \in E, \quad \forall V \in \mathcal{V}(x), \quad \exists W \in \mathcal{V}(x) \text{ connexe tel que } W \subset V.$$

(i.e. chaque point de E admet un système fondamental de voisinages connexes.)

A) (1) Montrer que si E est un espace vectoriel normé alors E est localement connexe.

(2) Montrer que si E_1 et E_2 sont localement connexes alors $E_1 \times E_2$ est localement connexe.

(3) Montrer que si E est localement connexe, F est un espace topologique et $f : E \rightarrow F$ une application continue alors $f(E)$ est localement connexe.

B) Soit E un espace topologique localement connexe.

(1) On note pour $x \in E$, $C = C(x)$ la composante connexe de x dans E .

-a- Montrer que tout ouvert de E est localement connexe (pour la topologie induite).

-b- Rappeler pourquoi C est fermé dans E .

-c- Montrer que C est ouvert dans E .

(2) Montrer que si pour tout ouvert A de E , les composantes connexes dans A sont ouverts dans E , alors E est localement connexe.

C) Soit E un ensemble infini. On pose

$$\tau = \{A \subset E / A^c \text{ fini}\} \cup \{\emptyset\}.$$

(1) Montrer que τ est une topologie sur E . τ est appelée la topologie cofinie sur E .

(2) Montrer que si $A \in \tau$ et $B \subset E$ sont non vides et tels que $A \cap B = \emptyset$ alors $B \notin \tau$.
En déduire que τ n'est pas séparée.

(3) Montrer que E est connexe.

(4) Soit $A \in \tau$.

-a- Montrer que la topologie induite de E sur A est une topologie cofinie.

-b- En déduire que A est connexe

(5) En déduire que E est localement connexe.

BONNE CHANCE

Examen de calcul différentiels et équations différentielles

Durée : 3h

Exercice 1 :

1) A matrice réelle $n \times n$, $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ définie par $f(x) = Ax$.

(a) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ et $\alpha \in \mathbb{R}^n / |\alpha| < \frac{1}{\|A\|}$, l'équation :

$$y = A(\alpha y + n) \quad (1)$$

admet une solution unique notée : $\phi = \phi(\alpha, n)$.

On définit ainsi l'application ϕ de $U: =]-\frac{1}{\|A\|}, \frac{1}{\|A\|}[\times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$

Déterminer l'expression de ϕ .

(b) Montrer que ϕ est de classe C^1 sur U .

Calculer les dérivées partielles $\phi'_\alpha(\alpha, x)$, $\phi'_x(\alpha, x)$ et vérifier que

$$\phi'_\alpha(\alpha, x) = \phi'_x(\alpha, x) \phi(\alpha, x), \quad \forall (\alpha, x) \in U$$

2) Soit E un Banach, $f: E \rightarrow E$ de classe C^1 , $a \in E$ et $b = f(a)$

(a) Montrer qu'il existe un voisinage ouvert U de $(0, a)$ dans $\mathbb{R} \times E$, un voisinage ouvert V de b dans E et une application $\phi: U \rightarrow E$ de classe C^1 tels que :

$$y \in V \text{ et } y = f(\alpha y + x) \iff y = \phi(\alpha, x)$$

(b) Montrer que ϕ vérifie :

$$\phi'_\alpha(\alpha, x) = \phi'_x(\alpha, x) \phi(\alpha, x), \quad \forall (\alpha, x) \in U$$

Exercice 2 :

On munit $\mathbb{R}^n$ de la norme associée à son produit scalaire usuel et on considère $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ une application de classe C^1 .

1. Montrer que l'application g définie par $g(x, y) = \|f(x) - f(y)\|^2$ est de classe C^1 .
Montrer que sa dérivée partielle $g''_{x,y}(x, y)$ existe et la déterminer.

2. On suppose que $\|f'(x)h\| = \|h\|$.

Montrer que pour tout x et y , $\|f(x) - f(y)\| \leq \|x - y\|$.

3. Soit $a \in \mathbb{R}^n$. montrer qu'il existe un voisinage ouvert U de a tel que la restriction de f à ce voisinage soit un C^1 -difféomorphisme de U sur $f(U)$.

Exercice 3 :

I intervalle réel contenant $[0,1]$, p, q, r et $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ des applications définies et continues sur I . On suppose que p ne s'annule pas sur I et on considère l'équation différentielle :

$$p(t)x'' + q(t)x' + r(t)x = f(t) \quad (1)$$

et l'équation linéaire et homogène associée :

$$p(t)x'' + q(t)x' + r(t)x = 0 \quad (2)$$

1. Soient x_0 et y_0 des réels. Vérifier qu'il existe une unique solution maximale ϕ de (1) (respectivement de (2)) définie sur I et vérifiant $\phi(0) = x_0$ et $\phi'(0) = y_0$

2. Soient ϕ_1 et ϕ_2 deux solutions maximales de (2). On pose :

$$w(t) = \phi_1(t)\phi_2'(t) - \phi_1'(t)\phi_2(t)$$

Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes :

- a) Les solutions ϕ_1 et ϕ_2 sont linéairement indépendantes.
- b) Pour tout $t \in I$, $w(t) \neq 0$
- c) $\exists t_0 \in I / w(t_0) \neq 0$

3. On suppose que ϕ_1 et ϕ_2 sont linéairement indépendantes. Soit ϕ la solution maximale de (1) qui vérifie $\phi(0) = \phi'(0) = 0$.

Montrer qu'il existe deux fonctions α_1 et α_2 définies et de classe C^1 sur I telles que :

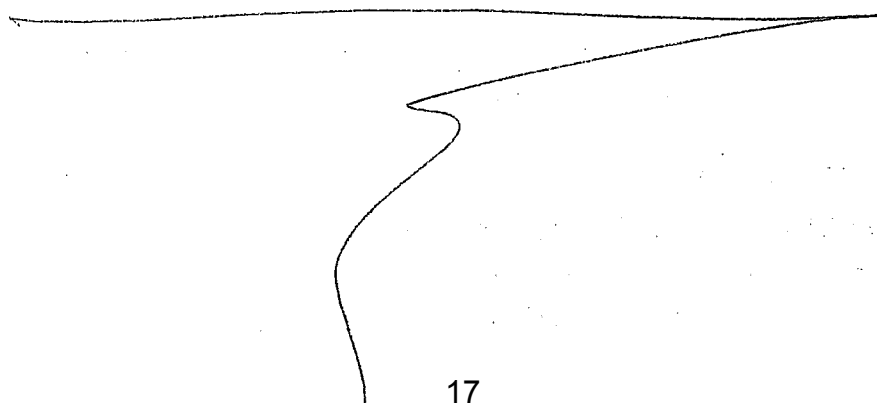
$$\alpha_1\phi_1 + \alpha_2\phi_2 = \phi$$

$$\alpha_1'\phi_1 + \alpha_2'\phi_2 = 0$$

Déterminer α_1 et α_2 en fonction de f, ϕ_1, ϕ_2, p et w .

4. Montrer qu'une condition nécessaire et suffisante pour que (1) possède une solution ϕ vérifiant $\phi(0) = \phi'(0) = 0$ et $\phi(1) = \phi'(1) = 0$ est que :

$$\int_0^1 \phi_1(t)f(t)/w(t)p(t)dt = \int_0^1 \phi_2(t)f(t)/w(t)q(t)dt = 0$$



Examen : Intégration & Probabilité**Durée : 03H****Exercice 1 (05 points).**

Soient Ω un ensemble non vide et $A \subset \Omega$. On définit la classe

$$\mathcal{A} = \{B \subset \Omega : A \subset B\}.$$

1. Montrer que $\sigma(\mathcal{A}) = \{B \subset \Omega : A \subset B \text{ ou } A \subset B^c\}$.
2. Sous quelles conditions, $\sigma(\mathcal{A}) = \mathcal{P}(\Omega)$.
3. Sous quelles conditions, $\sigma(\mathcal{A}) = \{\emptyset, \Omega\}$.

CLUB NAJAH+
UCD.FS.ELJADIDA
LE PRÉSIDENT

Exercice 2 (04 points).

1. Soient $(\Omega, \mathfrak{T})$ et $(f_n)_n$ une suite de fonctions $\Omega \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ mesurables. Montrer que l'ensemble

$$\{\omega \in \Omega : (f_n(\omega))_n \text{ admet une limite finie}\}$$

est mesurable.

2. Soit f une fonction d'un espace topologique X vers un espace métrique (Y, d) . Montrer que l'ensemble des points où f est continue est un borélien de X .

Exercice 3 (04points).

Calculer les limites des suites suivantes

1. $u_n = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{n+\sin(k)}{2^{k n+1}}$.
2. $v_n = \int_0^{+\infty} n \ln(1 + \frac{1}{n e^x}) dx$.
3. $w_n = \int_0^1 (\sin(\frac{1}{x}))^n dx$.

Tournez la page s'il vous plaît

Exercice 4 (07 points).

Soit (Ω, T, μ) un espace mesuré tel que $\mu(\Omega) < +\infty$.

1. Montrer que $L^2(\Omega, T, \mu) \subset L^1(\Omega, T, \mu)$.
2. Montrer que la convergence au sens de L^2 implique la convergence au sens de L^1 .
3. Soient $f \in L^1(\Omega, \mathfrak{T}, \mu)$ et $a, b \in \mathbb{R}$. Montrer que si $a\mu(A) \leq \int_A f d\mu \leq b\mu(A)$ pour tout $A \in \mathfrak{T}$ alors

$$a \leq f \leq b \quad \mu - p.p.$$

4. Soit $f \in L^{+\infty}(\Omega, \mathfrak{T}, \mu)$ telle que $\|f\|_{\infty} = 1$.
 - (a) Vérifier que $L^{+\infty}(\Omega, \mathfrak{T}, \mu) \subset L^p(\Omega, \mathfrak{T}, \mu)$ pour $p \geq 1$.
 - (b) Soit $\varepsilon > 0$. On pose

$$\Omega_{\varepsilon} = \{\omega \in \Omega : |f(\omega)| \geq (1 - \varepsilon)\}.$$

Montrer que $\int_{\Omega} |f(\omega)|^p d\mu \geq (1 - \varepsilon)^p \mu(\Omega_{\varepsilon})$ pour $p \geq 1$.

- (c) Vérifier que $\mu(\Omega_{\varepsilon}) > 0$ pour tout $\varepsilon > 0$ et que

$$\lim_{p \rightarrow +\infty} [\mu(\Omega_{\varepsilon})]^{\frac{1}{p}} = 1.$$

- (d) En déduire que $\liminf_{p \rightarrow +\infty} \|f\|_p \geq 1 - \varepsilon$ pour tout $\varepsilon > 0$.
- (e) Montrer que $\lim_{p \rightarrow +\infty} \|f\|_p = 1$.
- (f) Montrer que plus généralement, on a $\lim_{p \rightarrow +\infty} \|f\|_p = \|f\|_{\infty}$ pour tout $f \in L^{+\infty}(\Omega, \mathfrak{T}, \mu)$.

BONNE CHANCE

Examen de Rattrapage : Intégration & Probabilité Durée : 03H

Exercice 1 (05 points).

Soient $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et X une variable aléatoire réelle. La fonction de répartition de X est la fonction définit pour tout $x \in \mathbb{R}$, par

$$F_X(x) = \mathbb{P}_X([-\infty, x]) = \mathbb{P}(X^{-1}([-\infty, x])).$$

Montrer que

1. F_X est croissante.
2. F_X est continue à droite et admet une limite à gauche en tout point t_0 . De plus, $\lim_{t \rightarrow t_0, t < t_0} F_X(t) = \mathbb{P}(X < t_0)$.
3. $\lim_{t \rightarrow -\infty} F_X(t) = 0$ et $\lim_{t \rightarrow +\infty} F_X(t) = 1$.
4. F_X est continue en t_0 si et seulement si $\mathbb{P}(X = t_0) = 0$.

Exercice 2. (05 points)

On considère la fonction

$$f(x, y) = \sin(x)e^{-xy}.$$

1. Montrer que f est intégrable sur $[0, a] \times [0, +\infty[$ pour tout $a > 0$.
2. En appliquant le théorème de Fubini, calculer l'intégrale

$$I_a = \int_{[0, a] \times [0, +\infty[} f d\lambda(x) \otimes d\lambda(y).$$

3. En déduire que $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x} dx = \frac{\pi}{2}$.

Tournez la page s'il vous plaît

Exercice 3 (10points).

Soient $(\Omega, \mathfrak{T}, \mu)$ un espace mesuré et $f : \Omega \rightarrow \overline{\mathbb{R}}^+$ une fonction positive μ -intégrable. On pose

$$N = \{\omega \in \Omega : f(\omega) = +\infty\}.$$

1. Montrer que N est mesurable.
2. Montrer que $\mu(N) = 0$.
3. Vérifier que $M = \{\omega \in \Omega : f(\omega) \neq 0\} = \bigcup_{n \geq 1} \{\omega \in \Omega : f(\omega) > \frac{1}{n}\}$. En déduire que M est mesurable.
4. On pose pour tout $n \geq 1$, $A_n = \{\omega \in \Omega : f(\omega) > \frac{1}{n}\}$. Montrer que

$$\mu(A_n) < +\infty, \text{ pour tout } n \geq 1.$$

5. On suppose que μ est σ -finie.
 - (a) Montrer qu'il existe une suite $\Omega_n \in \mathfrak{T}$ croissante telle que $\bigcup_{n \geq 1} \Omega_n = \Omega$ et $0 < \mu(\Omega_n) < +\infty$ pour tout $n \geq 1$.
 - (b) Vérifier que pour tout $n \geq 1$, il existe $\alpha_n > 0$ tel que $\alpha_n \leq 2^{-1}$ et $\alpha_n \mu(\Omega_n) \leq 2^{-n}$.
 - (c) On pose $h = \sum_{n=1}^{+\infty} \alpha_n \mathbf{1}_{\Omega_n}$. Montrer que
 - i. h est mesurable.
 - ii. $0 < h \leq 1$.
 - iii. $\int_{\Omega} h d\mu \leq 1$.
6. On suppose maintenant qu'on a une fonction $g : \Omega \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ μ -intégrable telle que

$$0 < g(\omega) < +\infty \text{ pour tout } \omega \in \Omega.$$

- (a) Vérifier que $\Omega = \{\omega \in \Omega : g(\omega) \neq 0\}$.
 - (b) Montrer que μ est σ -finie.
7. Conclure.

BONNE CHANCE

Intégration & Probabilité

Examen

Durée : 03H

Exercice 1 (05 points).

Soit $(\Omega, \mathcal{T}, \mu)$ un espace mesuré. On définit les classes d'ensembles suivantes :

$$\mathcal{N} = \{N \subset \Omega : N \text{ est négligeable pour } \mu\},$$

$$\overline{\mathcal{T}} = \{A \cup N : N \in \mathcal{N}, A \in \mathcal{T}\}.$$

1. Montrer que $\overline{\mathcal{T}}$ est une tribu sur Ω .
2. Montrer que l'application $\overline{\mu} : A \cup N \in \overline{\mathcal{T}} \mapsto \mu(A) \in [0, +\infty]$ avec $A \in \mathcal{T}$ et $N \in \mathcal{N}$ est bien définie.
3. Montrer que $\overline{\mu}$ est une mesure sur $\overline{\mathcal{T}}$.
4. Montrer que $\overline{\mu}$ est l'unique mesure qui prolonge μ .
5. Montrer que $\overline{\mathcal{T}}$ est complète pour $\overline{\mu}$.

Exercice 2 (05 points).

Soit $(\Omega, \mathcal{T}, \mu)$ un espace mesuré et $f_n : \Omega \rightarrow [0, +\infty]$ une suite de fonctions mesurables. On suppose que f_n converge simplement vers une fonction f

1. Montrer que f est mesurable.
2. Montrer que l'ensemble $\{\omega \in \Omega : \lim f_n(\omega) \text{ existe dans } \mathbb{R}\}$ est mesurable.
3. Montrer que si $(f_n)_n$ est croissante positive alors

$$\int_A f d\mu = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_A f_n d\mu \text{ pour tout } A \in \mathcal{T}.$$

4. En déduire que si $(f_n)_n$ est décroissante positive et $\int_\Omega f_1 d\mu$ est finie alors

$$\int_A f d\mu = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_A f_n d\mu \text{ pour tout } A \in \mathcal{T}.$$

Exercice 3 (05 points). (Les deux questions sont indépendantes)

1. On pose $f_n : x \in [1, +\infty[\mapsto \frac{1}{nx} e^{-\frac{x}{n}}$ pour $n \geq 1$.
 - (a) Montrer que la fonction $u \in [0, +\infty[\mapsto u e^{-u}$ est bornée.
 - (b) Calculer $\lim_n \int_{[1, +\infty[} f_n d\lambda$.
2. Soit a, b deux réels tels que $0 < a < b$. En calculant l'intégrale

$$I = \int_{[0,1] \times [a,b]} x^y d\lambda(x) \otimes \lambda(y)$$

de deux manières différentes, en déduire la valeur de l'intégrale

$$\int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\ln(x)} dx.$$

Tournez la page s'il vous plaît

Exercice 4 (05 points).

Soit $(\Omega, \mathcal{I}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et X une variable aléatoire réelle sur Ω . La fonction caractéristique de X est définie par :

$$\phi_X(t) = E(e^{itX}) = \int_{\Omega} e^{itX} d\mathbb{P}, \text{ pour tout } t \in \mathbb{R}.$$

Montrer que

1. $\phi_X(0) = 1$ et $|\phi_X(t)| \leq 1$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.
2. $\phi_{aX+b}(t) = e^{itb} \phi_X(at)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$ et $a, b \in \mathbb{R}$.
3. ϕ_X est réelle si et seulement si $\mathbb{P}_X = \mathbb{P}_{-X}$.
4. ϕ_X est uniformément continue.
5. Si $E(|X|) < +\infty$ alors ϕ_X est dérivable et donner ϕ'_X .

Examen de Rattrapage

Exercice 1. 1. Les fonctions suivantes $\mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ sont-elles continues ? sinon, préciser pourquoi :

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{\sin x \sin y}{\sqrt{|x|} + \sqrt{|y|}} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

$$g(x, y) = \begin{cases} \frac{x^4 y^4}{(x^2 + y^4)^3} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

2. L'application suivante définie de $\mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ par :

$$\varphi(t) = \begin{cases} t^2 \sin \frac{1}{t} & \text{si } t \neq 0 \\ 0 & \text{si } t = 0 \end{cases}$$

est-elle continue, différentiable, C^1 ?

3. Montrer que l'application :

$$h : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R} \text{ définie par } h(x, y) = \begin{cases} \frac{y^2}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ y & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

est dérivable dans toutes les directions en $(0, 0)$ sans même être continue en $(0, 0)$.

Exercice 2. On considère les espaces : $E = C([0, 1])$ et $E_1 = \{f \in C^1([0, 1]) / f(0) = 0\}$. Pour $f \in E$ et $g \in E$, On pose

$$\|f\|_\infty = \sup_{[0, 1]} |f(t)| \quad \text{et} \quad N(g) = \|g'\|_\infty$$

On admet que $\|\cdot\|_\infty$ et N sont des normes respectivement sur E et E_1 et que ces deux espaces munis de ces normes sont complets.

1. Montrer que l'application $\varphi : E \mapsto E$ définie par $\varphi(x) = x' + x^2$ est de classe C^1 et déterminer $D\varphi$
2. Montrer que φ est un C^1 difféomorphisme locale au voisinage de 0.
3. Soit $y \in E$. Montrer que si $\|y\|_\infty$ est assez petit, l'équation :

$$x'(t) + x^2(t) = y(t) \quad (*)$$

admet une et une seule solution appartenant à E_1

4. Soit $K \in]0, 1[$, $g : E_1 \longrightarrow E_1, g(x) = (D\varphi(0))^{-1}(y - \varphi(x)) + x$ et B_1 la boule fermée de E_1 de centre 0 et de rayon $K/2$.

Montrer que g est une application contractante de B_1 dans elle-même.

Montrer que lorsque $\|y\|_\infty \leq \frac{1}{2}K(1 - K)$, l'équation (*) a une unique solution $x \in E_1$, vérifiant $N(x) \leq \frac{K}{2}$.

5. Soit $a > 0$. On considère l'équation :

$$x'(t) + x^2(t) = -a^2$$

Montrer qu'il existe des valeurs de a pour lesquelles cette équation n'a aucune solution appartenant à E_1 .

Exercice 3. On considère dans $\mathbb{R}^2$ l'équation différentielle :

$$(E) \quad \begin{cases} x' &= -y + x(x^2 + y^2) \\ y' &= x + y(x^2 + y^2) \end{cases}$$

Soit (x_0, y_0) un point distinct de l'origine et on note $\gamma :]\alpha, \beta[\longrightarrow \mathbb{R}^2$ la solution maximale de (E) vérifiant : $\gamma(0) = (x_0, y_0)$.

1. Justifier l'existence et l'unicité de γ .

2. On pose $N(x, y) = x^2 + y^2$ et $h = N \circ \gamma$.

- Exprimer $h'(t)$ en fonction de $\gamma(t)$.

- En déduire que $\alpha = -\infty$

3. Quelle équation différentielle (F) vérifie h ?

- Expliciter les solutions maximales de (F)

4. Montrer que β est fini et que $\lim_{t \rightarrow \beta} \|\gamma(t)\| = +\infty$.

- Montrer aussi que $\gamma(t) \mapsto (0, 0)$ quand $t \mapsto -\infty$.

Intégration & Probabilité
Examen : session normale
Durée : 03H00

Exercice 1.

En justifiant rigoureusement votre réponse, calculer les limites suivantes :

1. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 \frac{n}{1+x^2} \sin\left(\frac{x}{n}\right) dx.$
2. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} \frac{\sin(\pi x)}{1+x^n} dx.$

Exercice 2.

Soit $(\Omega, \mathcal{T}, \mu)$ un espace mesuré tel que $\mu(\Omega) < +\infty$ et f et $(f_n)_{n \geq 1}$ des fonctions réelles mesurables.

1. Montrer que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\Omega} \frac{|f_n - f|}{1 + |f_n - f|} d\mu = 0 \iff f_n \xrightarrow{\mu} f.$$

2. Vérifier par un contreexemple que l'équivalence n'est plus vraie si μ n'est pas finie.

Exercice 3.

En calculant l'intégrale suivante

$$\int_{[0,1] \times]0,+\infty[} e^{-y} \sin(2xy) d\lambda(x) \otimes \lambda(y)$$

de deux manière en déduire la valeur de

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{y} (\sin(y))^2 e^{-y} dy.$$

Justifier toutes les étapes.

(indication pour calculer $\int_0^{+\infty} e^{-y} \sin(2xy) dy$ utiliser une double intégration par parties)

Exercice 4.

Soit $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. On considère deux variables aléatoires réelles X, Y et on définit l'application

$$Z \begin{pmatrix} \Omega & \rightarrow & \mathbb{R}^2 \\ \omega & \mapsto & (X(\omega), Y(\omega)) \end{pmatrix}$$

On rappelle aussi la loi de probabilité de X et Y par

$$\mathbb{P}_X(A) = \mathbb{P}(X \in A), \quad \forall A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}),$$

$$\mathbb{P}_Y(B) = \mathbb{P}(Y \in B), \quad \forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}),$$

1. Vérifier que Z est mesurable (on dit que Z est un couple aléatoire)
2. Donner la définition de la loi $\mathbb{P}_Z$ de Z .
3. Rappeler la définition deux variables aléatoires réelles indépendantes X et Y .
4. On suppose dans la suite que X et Y sont indépendantes.

(a) Vérifier que

$$\mathbb{P}(X \in A, Y \in B) = \mathbb{P}(X \in A)\mathbb{P}(Y \in B), \quad \forall A, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}).$$

(b) En déduire que $\mathbb{P}_Z = \mathbb{P}_X \otimes \mathbb{P}_Y$.

(c) Montrer que si X, Y sont intégrables alors XY est intégrable et

$$E(XY) = E(X)E(Y).$$

Indication : On rappelle que pour toute ϕ continue on a

$$E(\phi(Z)) = \int_{\mathbb{R}^2} \phi(x, y) d\mathbb{P}_Z(x, y).$$

(d) Montrer que si X et Y sont à carrés intégrables alors

$$\text{Var}(X + Y) = \text{Var}(X) + \text{Var}(Y).$$

Intégration & Probabilité
Rattrapage
Durée : 03H

Exercice 1 (06 points).

1. Montrer que $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2) \subset \mathcal{B}(\mathbb{R}) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R})$
2. Soit $a_2 < b_2 \in \mathbb{Q}$. Montrer que la classe

$$\mathcal{M}_1 = \{A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) : A \times]a_2, b_2[\in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R})\}.$$

est une tribu sur $\mathbb{R}$.

3. Montrer que la classe :

$$\mathcal{M}_2 = \{B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) : A \times B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}) \text{ pour tout } A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\}.$$

est une tribu sur $\mathbb{R}$.

4. En déduire que $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2) = \mathcal{B}(\mathbb{R}) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

Exercice 2 (04 points).

Soit $a > 0$. On considère la suite de fonctions $(S_n)_n$ définie sur $[0, 1[$ par

$$S_n(t) = \sum_{k=0}^n (-1)^k t^{ka}, \text{ pour tout } t \in [0, 1[.$$

1. Vérifier que S_n est mesurable et que

$$S_n(t) = \frac{1 - (-1)^{n+1} t^{(n+1)a}}{1 + t^a} \text{ pour tout } t \in [0, 1[.$$

2. Montrer que la suite $(S_n)_n$ converge simplement sur $[0, 1[$ et donner sa limite S .
3. Montrer que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{na+1} = \int_0^1 \frac{dt}{1+t^a}.$$

Exercice 3 (10 points).

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espace probabilisé. Pour une variable aléatoire $X : \Omega \rightarrow \mathbb{N}$, la fonction génératrice de X est

$$\phi_X(z) = \mathbb{E}(z^X) = \sum_{k=0}^{+\infty} z^k P(X = k), \text{ pour tout } z \in [-1, 1].$$

1. Montrer que deux variables aléatoires de même loi ont la même fonction génératrice.
2. Montrer que la série $\sum_{k=0}^{+\infty} z^k P(X = k)$ est normalement convergente pour $z \in [-1, 1]$.
3. En déduire que ϕ_X est de classe C^∞ sur $] -1, 1[$ et que

$$\phi_X^{(n)}(z) = \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{k!}{(k-n)!} z^{k-n} P(X = k), \text{ pour tout } z \in] -1, 1[.$$

4. En déduire que

$$\phi_X^{(n)}(0) = n!P(X = n) \text{ pour tout } n \geq 0.$$

5. Vérifier que pour $k \geq n$, on a

$$\frac{k!}{(k-n)!} = \prod_{l=0}^{n-1} (k-l).$$

6. Montrer que pour tout $n \geq 1$, on a

$$\mathbb{E}\left(\prod_{l=0}^{n-1} (X-l)\right) = \phi_X^{(n)}(1).$$

7. Montrer que si $X \in L^2(\Omega)$ alors $\mathbb{E}(X) = \phi_X'(1)$ et $\phi_X^{(2)}(1)$ sont finies et

$$\text{Var}(X) = \phi_X^{(2)}(1) + \phi_X'(1) - \phi_X'(1)^2.$$

8. Montrer que si $X_1, \dots, X_n$ sont des variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $\mathbb{N}$, alors

$$\phi_{X_1+\dots+X_n}(z) = \prod_{k=1}^n \phi_{X_k}(z) \text{ pour tout } z \in [-1, 1].$$

9. On suppose que les $X_1, \dots, X_n$ sont indépendantes de même loi de Bernoulli de paramètre p . Calculer $\phi_{X_1+\dots+X_n}$.

BONNE CHANCE

Intégration & Probabilité
Examen : session de rattrapage
Durée : 03H00

Exercice 1.

Calculer les limites suivantes :

1. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} (1 - \frac{x}{n})^n \frac{1}{1+(\frac{x}{2})^n} dx.$
2. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_1^2 \frac{x^n}{1+x^n} dx.$

Exercice 2.

Soit $(\Omega, \mathcal{T}, \mu)$ un espace mesuré. Pour une fonction positive $f \in L^1(\Omega, \mathcal{T}, \mu)$, on définit l'application

$$\nu(E) = \int_E f d\mu, \quad \forall E \in \mathcal{T}.$$

1. Montrer que ν est une mesure.
2. Montrer que si $g : \Omega \rightarrow [0, +\infty]$ est mesurable alors

$$\int_{\Omega} g d\nu = \int_{\Omega} g f d\mu.$$

3. Montrer que $g : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ est ν -intégrable si et seulement si $f |g|$ est μ -intégrable. Montrer dans ce cas que

$$\int_{\Omega} |g| d\nu = \int_{\Omega} |g| f d\mu, \quad \text{et} \quad \int_{\Omega} g d\nu = \int_{\Omega} g f d\mu.$$

Exercice 3.

Soit $(\Omega, \mathcal{T})$ un espace mesurable et μ et ν deux mesures finies sur $\mathcal{T}$ telles que

$$\nu(A) \leq \mu(A), \quad \forall A \in \mathcal{T}.$$

Université Chouaib Doukkali
Faculté des Sciences
El Jadida

Année 2012-2013

Examen de Calcul Différentiel
Sma5, Durée 1h 30 min

Exercice 1:

On désigne par $C_0^2([0, 1], \mathbb{R})$ l'espace des applications définies et de classe C^2 sur $[0, 1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, qui sont de classe C^2 sur $[0, 1]$ et qui prennent 0 en 0 et on note E cet espace.

1-Pour tout $x \in E$, on pose:

$$N(x) = \|x''\|_\infty + |x'(0)|, \quad \text{avec} \quad \|x\|_\infty = \sup_{[0,1]} |x(t)|$$

a. Montrer que N est une norme sur E , et que E muni de cette norme est complet.

b. Comparer les deux normes sur E : N et $\|\cdot\|_\infty$. (On peut considérer la suite $x_n(t) = \frac{\sin nt}{n}$)

2-On note par F l'espace $C([0, 1], \mathbb{R})$ et on considère l'application $f : (E, N) \rightarrow (F, \|\cdot\|_\infty)$ définie pour tout $x \in E$ et $t \in [0, 1]$ par

$$f(x)(t) = (x''(t))^2 + t^2 x'(t)$$

a. Montrer que f est différentiable sur E et évaluer, pour tout x de E , $Df(x)$.

b. Montrer que f est de classe C^∞ sur E .

c. Calculer $Df(0)$ et montrer que pour tout $y \in F$ suffisamment petit, l'équation différentielle suivante:

$$(x''(t))^2 + t^2 x'(t) = y(t)$$

possède au moins une solution dans E .

Exercice 2:

1- Soient $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ une application différentiable et $h : \mathbb{R}^{*+} \times [0, 2\pi[\rightarrow \mathbb{R}$ l'application définie en fonction de g par

$$h(\rho, \theta) = g(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta)$$

- a. Calculer les dérivées partielles de h en fonction de celles de g .
- b. Résoudre l'équation aux dérivées partielles suivante:

$$x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} = \sqrt{x^2 + y^2}$$

2- Soit $\Phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ l'application définie par $\Phi(u, v) = \left(\frac{u+v}{2}, \frac{u-v}{2}\right)$.

- a. Montrer que Φ est un C^∞ -difféomorphisme.
- b. Soit $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ une application deux fois différentiable sur $\mathbb{R}^2$.
Calculer pour tout $(u, v) \in \mathbb{R}^2$,

$$\frac{\partial^2 F \circ \Phi(u, v)}{\partial u \partial v}$$

- c. Trouver les applications $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, de classe C^2 , solutions de l'équation des cordes vibrantes suivant:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = 0$$

exosup.com

Examen de rattrapage de Calcul Différentiel

Date le 12-2-14 durée 1h30

Exercice 1

Soit H un espace de Hilbert réel de dimension finie dont le produit scalaire et la norme sont notés respectivement $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et $\|\cdot\|$. Soit $f : H \longrightarrow H$ une application deux fois différentiable sur H telle que pour tous x et h dans H on a $\|df(x)(h)\| = \|h\|$.

- a) Montrer que pour tous x, h et k dans H on a $\langle df(x)(h), df(x)(k) \rangle = \langle h, k \rangle$. (Exprimer le produit scalaire en fonction de la norme).

Montrer que pour tout x dans H , $df(x)$ est bijective.

Pour tous h, k et l dans H on pose $A_x(h, k, l) = \langle df(x)(h), d^2f(x)(l, k) \rangle$.

- b) Montrer que $A_x(h, k, l) + A_x(k, h, l) = 0$.
 c) Montrer que pour tous h, k, l et x dans H on a $A_x(h, k, l) = 0$ et en déduire que $d^2f(x) = 0$ pour tout x dans H . (Utiliser b) et le théorème de Schwarz).
 d) Montrer que df est une application constante et en déduire que f est une application affine.

Exercice 2

L'espace $X = \mathcal{C}[0, 1]$ des fonctions réelles continues sur $[0, 1]$ est muni de la norme de la convergence uniforme. On considère Ω un ouvert de $\mathbb{R}^2$ tel que $[0, 1] \times \mathbb{R} \subset \Omega$ et une application $g : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ vérifiant :

- i) g est continue sur $[0, 1] \times \mathbb{R}$.
 ii) Pour tout $u \in [0, 1]$, $v \longrightarrow g(u, v)$ est dérivable et sa dérivée en v , notée $\frac{\partial g}{\partial v}(u, v)$, est uniformément continue sur $[0, 1] \times \mathbb{R}$. Soit $N : [0, 1] \times [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ une application continue.

A chaque $x \in X$, on associe la fonction notée $F(x)$ définie sur $[0, 1]$ comme suit :

$$\forall t \in [0, 1] : [F(x)](t) = \int_0^1 N(t, s)g(s, x(s))ds.$$

- 1) Montrer que $F(x)$ est continue sur $[0, 1]$.
- 2) On se propose dans cette question de démontrer que l'application de X dans X qui à x associe $F(x)$ est différentiable sur X , et de calculer sa différentielle en tout $x_0 \in X$.

Etant donné $x_0 \in X$, on pose $L_{x_0} : h \in X \longrightarrow L_{x_0}(h)$, fonction qui à t associe

$$L_{x_0}(h)(t) = \int_0^1 N(t, s) \frac{\partial g}{\partial v}(s, x_0(s)) h(s) ds.$$

- j) Montrer que L_{x_0} est une application linéaire continue de X dans X .
- jj) Dire pourquoi on a ceci : $\forall s \in [0, 1], \exists \theta(s) \in]0, 1[:$

$$g(s, x_0(s) + h(s)) - g(s, x_0(s)) = h(s) \frac{\partial g}{\partial v}(s, x_0(s) + \theta(s)h(s)).$$

On pose pour alléger l'écriture :

$$\alpha(s) = h(s) \frac{\partial g}{\partial v}(s, x_0(s) + \theta(s)h(s)) - h(s) \frac{\partial g}{\partial v}(s, x_0(s))$$

- jjj) Montrer que pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tels que

$$(\|h\|_\infty < \delta) \implies (|\alpha(s)| \leq \epsilon |h(s)|, \forall s \in [0, 1]).$$

En déduire que si $\|h\|_\infty < \delta$ alors

$$\|F(x_0 + h) - F(x_0) - L_{x_0}(h)\|_\infty \leq \epsilon \max_{s, t \in [0, 1]} |N(t, s)| \|h\|_\infty.$$

Conclure.

Examen de Calcul Différentiel

Date le -1-13 durée 1h30

CLUB NAJAH
 UCD.FS.ELJADIDA
 LE PRÉSIDENT

Exercice 1 Questions de cours :

- Enoncé du théorème de convergence des fonctions différentiables.
- Enoncé du théorème des fonctions implicites et une idée de sa preuve.

Exercice 2

Soit H un espace de Hilbert dont le produit scalaire et la norme sont notés respectivement $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et $\|\cdot\|$. Soit $g : H \rightarrow H$ une application différentiable sur H telle qu'il existe $k \in]0, 1[$ avec $\|dg(x)\| \leq k$, pour tout $x \in H$. On pose $f = id_H + g$ où id_H est l'application identique de H .

- Montrer que $\forall (x, y) \in H \times H$, on a $\|f(x) - f(y)\| \geq (1 - k)\|x - y\|$.
 En déduire que f est injective et que $\|f(x)\| \rightarrow +\infty$ si $\|x\| \rightarrow +\infty$.
 - Ayant indiqué pourquoi f est différentiable sur H , vérifier que $\forall (x, h) \in H \times H$, on a $\langle df(x)(h), h \rangle \geq (1 - k)\|h\|^2$.

- Soit $y \in H$ fixé et u l'application définie de H dans $\mathbb{R}$ par

$$u(x) = \|f(x) - y\|^2, \text{ pour tout } x \in H.$$

Montrer que u est différentiable sur H et calculer $du(x)$ en tout $x \in H$.

- On suppose désormais que H est de dimension finie.
 - Montrer qu'il existe $x_0 \in H$ tel que $u(x_0) = \inf_{x \in H} u(x)$. (En utilisant 1) a) montrer qu'il existe $R > 0$ tel que $\inf_{x \in H} u(x) = \inf_{x \in \overline{B}(0, R)} u(x)$).
 - Montrer que $f(x_0) = y$.
 - Que peut-on déduire pour f ?

Exercice 3

L'espace $E = \mathcal{C}[0, 1]$ des fonctions réelles continues sur $[0, 1]$ est muni de la norme de la convergence uniforme. On note B la boule ouverte de centre 0 et de rayon 1. Soit $\varphi : E \longrightarrow E$ l'application

$$\varphi(f)(x) = \int_0^x f^2(t)dt, f \in E, x \in [0, 1].$$

- 1) Montrer que φ est de classe $\mathcal{C}^1$ et déterminer $d\varphi(f)$. Montrer que pour tout $f \in E$, on a

$$\|d\varphi(f)\| \leq 2\|f\|.$$

- 2) On pose $\psi = id_E + \frac{1}{2}\varphi$. Montrer que pour tout $(f, g) \in E \times E$, on a

$$\|\psi(f) - \psi(g)\| \geq (1 - \frac{1}{2}(\|f\| + \|g\|))\|f - g\|.$$

En déduire que la restriction de ψ à B est injective.

- 3) Montrer que la restriction de ψ à B est un $\mathcal{C}^1$ -difféomorphisme de B sur $\psi(B)$. (Utiliser le fait que $Isom(E, E)$ est un ouvert).

EXAMEN
Janvier 2014
Durée 1H30

EXERCICE I

Soient

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

CLUB NAJAH
UCD.FS.ELJADIDA
LE PRÉSIDENT

On souhaite utiliser la méthode de Gauss-Seidel pour résoudre le système $Ax = b$.

- 1) Est ce que la méthode converge?
- 2) Ecrire le système itérative.
- 3) Simuler les 4 premières itérations de l'algorithme partant de $x^0 = (0, 0, 0)$.

EXERCICE II

Soit A la matrice symétrique

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 3 & 6 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

On note λ_i et v_i , $i = 1..3$, les valeurs et vecteurs propres normés associés respectivement de A . On admet que $\lambda_1 \simeq 9.1$. On donnera les valeurs avec 2 chiffres après la virgule.

- 1) Déterminer par la méthode de Gauss-Jordan, le vecteur propre v_1 de A associé à la valeur propre λ_1 .
- 2) Vérifier que les valeurs propres et les vecteurs propres normés associés de la matrice $B = A - \lambda_1 v_1 v_1^T$ sont respectivement λ_2 , λ_3 , 0 et v_2 , v_3 , v_1 .
- 3) Partant de $v^0 = (1, 0, 0)$, appliquer l'algorithme de la puissance itérée pour approcher λ_2 et v_2 avec une erreur relative de l'ordre de 10^{-2} .
- 4) Vérifier que les valeurs propres et les vecteurs propres normés associés de la matrice $C = B - \lambda_2 v_2 v_2^T$ sont respectivement λ_3 , 0, 0 et v_3 , v_1 , v_2 .
- 5) Partant de $v^0 = (1, 0, 0)$, appliquer l'algorithme de la puissance itérée pour approcher λ_3 et v_3 .
- 6) Calculer le conditionnement $K_2(A)$. Que pouvez-vous dire de A ?

EXAMEN DE THÉORIE DES CODES

DURÉE 1H30'

Exercice 1.

On considère $\mathcal{C}$ un code linéaire binaire de longueur 8 dont les mots $x = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8)$ vérifient les relations : $x_2 + x_3 + x_4 = x_5$, $x_1 + x_2 + x_3 = x_6$, $x_1 + x_2 + x_4 = x_7$ et $x_1 + x_3 + x_4 = x_8$.

- 1 - Quelle est la dimension de $\mathcal{C}$?
- 2 - Déterminer une matrice de contrôle H de $\mathcal{C}$.
- 3 - Calculer $H^t H$ et déterminer une matrice génératrice de $\mathcal{C}$.
- 4 - Montrer que tous les mots de $\mathcal{C}$ ont un poids pair.
- 5 - Calculer la distance minimale de $\mathcal{C}$.

CLUB NAJAH
 UCD.FS.ELJADIDA
 LE PRÉSIDENT

Exercice 2.

Soit $\mathbb{K}$ un corps à q éléments et n un entier non nul. Pour $c = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{K}^n$ et $\alpha \in \mathbb{K}$, on pose $c(\alpha) = \sum_{i=1}^n a_i \alpha^{i-1}$.

1 - Vérifier que pour tous $c_1, c_2 \in \mathbb{K}^n$, et $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{K}$ on a $(\lambda_1 c_1 + \lambda_2 c_2)(\alpha) = \lambda_1 c_1(\alpha) + \lambda_2 c_2(\alpha)$.

2 - Soient $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ des éléments distincts de $\mathbb{K}$ avec $m \leq n$. On pose $\mathcal{C} = \{c \in \mathbb{K}^n : c(\alpha_1) = c(\alpha_2) = \dots = c(\alpha_m) = 0\}$. Montrer que $\mathcal{C}$ est un code linéaire de dimension $n - m$.

(Indication : On pourra considérer l'application linéaire : $\phi : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^m$, définie par $\phi(c) = (c(\alpha_1), c(\alpha_2), \dots, c(\alpha_m))$.

Dans toute la suite, on prend $n = q - 1$ et α un générateur du groupe $\mathbb{K}^*$. On pose $\mathcal{C} = \{c \in \mathbb{K}^n : c(\alpha) = c(\alpha^2) = \dots = c(\alpha^m) = 0\}$.

- 3 - Montrer que $c = (1, 1, \dots, 1) \in \mathcal{C}$.
- 4 - Donner une matrice de contrôle de $\mathcal{C}$.
- 5 - Soient $C_{i_1}, \dots, C_{i_m}$ m colonnes quelconques de H . Montrer que le système $(C_{i_1}, \dots, C_{i_m})$ est libre.
- 6 - On note d la distance minimale de $\mathcal{C}$ et k sa dimension. Dédurre de 5 que $d \geq n - k + 1$ puis montrer que $\mathcal{C}$ est MDS.
- 7 - Application : Soit $\mathbb{K} = \mathbb{F}_5$ (donc $n = 5 - 1 = 4$) et $\alpha = \bar{2}$, $k = 2$.
 - (a) - Donner une matrice de contrôle puis une matrice génératrice de $\mathcal{C}$.
 - (b) - Montrer que $\mathcal{C}$ corrige au plus une erreur.
 - (c) - Soit $y = 1110$, vérifier que $y \notin \mathcal{C}$ et déterminer le mot x de $\mathcal{C}$ le plus proche de y .

Université Chouaib Doukkali - Faculté des Sciences - El Jadida
Filière : SMA - Semestre : 5 - A.U : 2012-2013 -

Examen du module : Structures Algébriques et Théorie des Codes

Epreuve de l'élément de module : Structures algébriques

Date: le 08/01/2013 - Durée : 1h30mn - Responsable : A. Serhir

Exercice 1

Soit n un entier naturel non nul.

1. Donner un exemple de groupe cyclique d'ordre n .

Soit G un groupe cyclique d'ordre n et d un diviseur de n . On note $G_d = \{x \in G \mid o(x) = d\}$.

2. Montrer que G est la réunion disjointe des G_d , avec d parcourant les diviseurs de n .
3. En déduire que $n = \sum_{d|n} \varphi(d)$, φ désigne la fonction d'Euler.

Exercice 2

Soit G un groupe fini dont la loi est notée multiplicativement et d'élément neutre e ; et H un sous-groupe distingué d'ordre n et d'indice m .

1. Montrer que pour tout $g \in G$, $g^m \in H$.
2. On suppose que m et n sont premiers entre eux. Montrer qu si K est un sous-groupe de G tel que, pour tout $a \in K$: $a^n = e$, alors $K \subset H$.
3. En déduire que si m et n sont premiers entre eux, alors H est le seul sous-groupe d'ordre n de G .
4. Montrer que tout groupe d'ordre $2p$, avec p premier impair, possède un seul sous-groupe d'ordre p .

Exercice 3

Soit $\mathbb{Z}[\mathbf{X}]$ l'anneau des polynômes à coefficients entiers.

On pose : $I = \{P \in \mathbb{Z}[\mathbf{X}] \mid 5 \text{ divise } P(0)\}$

1. Montrer que I est un idéal de $\mathbb{Z}[\mathbf{X}]$.
2. Montrer que $\mathbb{Z}[\mathbf{X}]$ n'est pas principal.

■

Université Chouaib Doukkali - Faculté des Sciences - El Jadida
 Filière : SMA - Semestre : 5 - A.U : 2012-2013 -

Examen du module : Structures Algébriques et Théorie des Codes

Epreuve de l'élément de module : Structures algébriques
 Date: le 08/01/2013 - Durée : 1h30mn - Responsable : A. Serhir

Exercice 1

+CLUB NAJAH+
 UCD.FS.ELJADIDA
 LE PRÉSIDENT

Soit n un entier naturel non nul.

1. Donner un exemple de groupe cyclique d'ordre n .

Soit G un groupe cyclique d'ordre n et d un diviseur de n . On note $G_d = \{x \in G \mid o(x) = d\}$.

2. Montrer que G est la réunion disjointe des G_d , avec d parcourant les diviseurs de n .
3. En déduire que $n = \sum_{d|n} \varphi(d)$, φ désigne la fonction d'Euler.

Exercice 2

Soit G un groupe fini dont la loi est notée multiplicativement et d'élément neutre e ; et H un sous-groupe distingué d'ordre n et d'indice m .

1. Montrer que pour tout $g \in G$, $g^m \in H$.
2. On suppose que m et n sont premiers entre eux. Montrer qu si K est un sous-groupe de G tel que, pour tout $a \in K$: $a^n = e$, alors $K \subset H$.
3. En déduire que si m et n sont premiers entre eux, alors H est le seul sous-groupe d'ordre n de G .
4. Montrer que tout groupe d'ordre $2p$, avec p premier impair, possède un seul sous-groupe d'ordre p .

Exercice 3

Soit $\mathbb{Z}[X]$ l'anneau des polynômes à coefficients entiers.

On pose : $I = \{P \in \mathbb{Z}[X] \mid 5 \text{ divise } P(0)\}$

1. Montrer que I est un idéal de $\mathbb{Z}[X]$.
2. Montrer que $\mathbb{Z}[X]$ n'est pas principal.

■

